TOPOLOGIE SUR L'ENSEMBLE DES PARTIES POSITIVES D'UN RÉSEAU

CÉDRIC BONNAFÉ

Résumé. Nous définissons une notion de *partie positive* d'un réseau Λ et munissons l'ensemble de ces parties positives d'une topologie. Nous étudions ensuite quelques propriétés de cette topologie, en la comparant à celle de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$, où V^* est l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$.

Abstract. We define a notion of *positive part* of a lattice Λ and we endow the set of such positive parts with a topology. We then study some properties of this topology, by comparing it with the one of $V^*/\mathbb{R}_{>0}$, where V^* is the dual vector space of $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$.

Fixons dans cet article un réseau Λ et notons $V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$. Une partie X de Λ est dite *positive* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\Lambda = X \cup (-X)$.
- $X + X \subset X$.
- $X \cap (-X)$ est un sous-groupe de Λ.

Nous noterons $\mathscr{P}os(\Lambda)$ l'ensemble des parties positives de Λ. Le but de cet article est d'étudier cet ensemble, et notamment de le munir d'une topologie, ceci de façon fonctorielle.

Nous définissons notamment deux applications $\overline{\mathrm{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \to \mathscr{P}os(\Lambda)$ et $\pi : \mathscr{P}os(\Lambda) \to V^*/\mathbb{R}_{>0}$ dont nous montrons qu'elles sont continues et vérifient $\pi \circ \overline{\mathrm{Pos}} = \mathrm{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$. De plus, $\overline{\mathrm{Pos}}$ induit un homémorphisme sur son image, et celle-ci est dense dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$. Ces propriétés sont résumées dans le théorème 2.17.

Nous terminons cet article par une étude des *arrangement d'hyperplans* dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$, en montrant notamment que l'intuition classique sur les arrangements d'hyperplans réels reste valide.

Ces résultats seront utilisés ultérieurement par l'auteur pour étudier le comportement des cellules de Kazhdan-Lusztig lorsque les paramètres varient [1].

Date: August 26, 2008.

1991 *Mathematics Subject Classification.* According to the 2000 classification: Primary 06F20.

L'auteur est en partie financé par l'ANR (Projet No JC07-192339).

TABLE DES MATIÈRES

1. PARTIES POSITIVES D'UN RÉSEAU

Le but de cette section est d'étudier l'ensemble des parties positives de Λ. Nous munirons cet ensemble d'une topologie dans la section suivante.

1.A. **Définitions, préliminaires.** Une partie X de Λ est dite *positive* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(P1) $\Lambda = X \cup (-X)$.
(P2) $X + X \subset X$.
(P3) $X \cap (-X)$ est un sous-groupe de Λ.

Nous noterons $\mathscr{P}os(\Lambda)$ l'ensemble des parties positives de Λ. Donnons quelques exemples. Pour commencer, notons que $\Lambda \in \mathscr{P}os(\Lambda)$. Soit Γ un groupe totalement ordonné et soit $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ un morphisme de groupes. Posons

$$\mathrm{Pos}(\varphi) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) \geqslant 0\}$$

et
$$\mathrm{Pos}^+(\varphi) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) > 0\}.$$

Alors il est clair que

(1.1) $$\operatorname{Ker}\varphi = \mathrm{Pos}(\varphi) \cap \mathrm{Pos}(-\varphi) = \mathrm{Pos}(\varphi) \cap -\mathrm{Pos}(\varphi)$$

et que

(1.2) $\mathrm{Pos}(\varphi)$ *est une partie positive de* Λ.

Lemme 1.3. *Soit X une partie positive de Λ. Alors :*

(a) $-X \in \mathscr{P}os(\Lambda)$.
(b) $0 \in X$.
(c) *Si $\lambda \in \Lambda$ et si $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ est tel que $r\lambda \in X$. Alors $\lambda \in X$.*
(d) $\Lambda/(X \cap (-X))$ *est sans torsion.*

Démonstration. (a) est immédiat. (b) découle de la propriété (P1) des parties positives. (d) découle de (c). Il nous reste à montrer (c). Soient $\lambda \in \Lambda$ et $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $r\lambda \in X$. Si $\lambda \notin X$, alors $-\lambda \in X$ d'après la propriété (P1). D'où $\lambda = r\lambda + (r-1)(-\lambda) \in X$ d'après (P2), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\lambda \in X$. □

Nous allons montrer une forme de réciproque facile à la propriété 1.2. Soit $X \in \mathscr{P}os(\Lambda)$. Notons $\mathrm{can}_X : \Lambda \to \Lambda/(X \cap (-X))$ le morphisme canonique. Si γ et γ' appartiennent à $\Lambda/(X \cap (-X))$, nous écrirons $\gamma \leqslant_X \gamma'$ s'il existe un représentant de $\gamma' - \gamma$ appartenant à X. Il est facile de vérifier que

(1.4) $\gamma \leqslant_X \gamma'$ *si et seulement si tout représentant de $\gamma' - \gamma$ appartient à X.*

On déduit alors facilement des propriétés (P1), (P2) et (P3) des parties positives que

(1.5) $(\Lambda/(X \cap (-X)), \leqslant_X)$ *est un groupe abélien totalement ordonné*

et que

(1.6) $$X = \mathrm{Pos}(\mathrm{can}_X).$$

1.B. **Conséquences du théorème de Hahn-Banach.** Si X est une partie positive de Λ, on pose $X^+ = X \setminus (-X)$. On a alors

(1.7) $$\Lambda = X \,\dot\cup\, (-X^+) = X^+ \,\dot\cup\, (-X) = X^+ \,\dot\cup\, (X \cap (-X)) \,\dot\cup\, (-X^+),$$

où $\dot\cup$ désigne l'union disjointe. De plus, si $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ est un morphisme de groupes abéliens et si Γ est un groupe totalement ordonné, alors

(1.8) $$\mathrm{Pos}^+(\varphi) = \mathrm{Pos}(\varphi)^+.$$

Si φ est une forme linéaire sur V, nous noterons abusivement $\mathrm{Pos}(\varphi)$ et $\mathrm{Pos}^+(\varphi)$ les parties $\mathrm{Pos}(\varphi|_\Lambda)$ et $\mathrm{Pos}^+(\varphi|_\Lambda)$ de Λ.

Lemme 1.9. *Soit X une partie positive propre de Λ, soit Γ un groupe abélien totalement ordonné archimédien et soit $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ un morphisme de groupes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$X \subseteq \mathrm{Pos}(\varphi)$;*
(2) *$X^+ \subseteq \mathrm{Pos}(\varphi)$;*
(3) *$\mathrm{Pos}^+(\varphi) \subseteq X^+$;*
(4) *$\mathrm{Pos}^+(\varphi) \subseteq X$.*

Démonstration. Il est clair que (1) implique (2) et que (3) implique (4).

Montrons que (2) implique (3). Supposons donc que (2) est vérifiée. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $\varphi(\lambda) > 0$ et supposons que $\lambda \notin X^+$. Alors, d'après 1.7, $\lambda \in -X$. Or, si $\mu \in \Lambda$, il existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $\varphi(\mu - k\lambda) = \varphi(\mu) - k\varphi(\lambda) < 0$ (car Γ est archimédien). Donc $\mu - k\lambda \notin X^+$ d'après (2). Donc $\mu - k\lambda \in -X$ d'après 1.7. Donc, $\mu = (\mu - k\lambda) + k\lambda \in (-X)$. Donc $\Lambda \subseteq -X$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Montrons que (4) implique (1). Supposons donc que $\mathrm{Pos}^+(\varphi) \subseteq X$. En prenant le complémentaire dans Λ, on obtient $(-X^+) = (-X)^+ \subseteq \mathrm{Pos}(-\varphi)$ et donc, puisque (2) implique (3), on a $\mathrm{Pos}^+(-\varphi) \subseteq -X^+$. En reprenant le complémentaire dans Λ, on obtient $X \subseteq \mathrm{Pos}(\varphi)$. □

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 1.10. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de Λ et supposons trouvé un n-uplet $t_1, \dots, t_n$ de nombres réels* ***strictement*** *positifs tels que $t_1\lambda_1 + \cdots + t_n\lambda_n = 0$. Alors il existe des entiers naturels non nuls $r_1, \dots, r_n$ tels que $r_1\lambda_1 + \cdots + r_n\lambda_n = 0$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$ de nombres réels qui satisfont

$$\begin{cases} u_1 + \cdots + u_n = 1, \\ u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n = 0. \end{cases}$$

Écrit dans une base de Λ, ceci est un système linéaire d'équations à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Le procédé d'élimination de Gauss montre que l'existence d'une solution *réelle* implique l'existence d'une solution *rationnelle* $t^\circ = (t_1^\circ, \dots, t_n^\circ)$ et l'existence de vecteurs $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Q}^n$ tels que

$$\mathscr{S} = \{t^\circ + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r \mid (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r\}.$$

En particulier, il existe $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$(t_1, \dots, t_n) = t^\circ + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r.$$

Puisque $t_1, \dots, t_n$ sont strictement positifs, il existe $x'_1, \dots, x'_r$ dans $\mathbb{Q}$ tels que les coordonnées de $t^\circ + x'_1v_1 + \cdots + x'_rv_r$ soient strictement positives. Posons alors $(u_1, \dots, u_n) = t^\circ + x'_1v_1 + \cdots + x'_rv_r$. On a donc $u_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ pour tout i et

$$u_1\lambda_1 + \cdots + u_n\lambda_n = 0.$$

Quitte à multiplier par le produits des dénominateurs des u_i, on a trouvé $r_1,\ldots,$ $r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que

$$r_1\lambda_1 + \cdots + r_n\lambda_n = 0,$$

comme attendu. $\square$

Théorème 1.11. *Soit X une partie positive de Λ différente de Λ. Alors :*

(a) *Il existe une forme linéaire φ sur V telle que $X \subseteq \operatorname{Pos}(\varphi)$.*

(b) *Si φ et φ' sont deux formes linéaires sur V telles que $X \subseteq \operatorname{Pos}(\varphi) \cap \operatorname{Pos}(\varphi')$, alors il existe $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\varphi' = \kappa\varphi$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{C}^+$ l'enveloppe convexe de X^+. Notons que X^+ (et donc $\mathscr{C}^+$) est non vide car $X \neq \Lambda$. Nous allons commencer par montrer que $0 \notin \mathscr{C}^+$. Supposons donc que $0 \in \mathscr{C}^+$. Il existe donc $\lambda_1,\ldots,$ λ_n dans X^+ et $t_1,\ldots,$ t_n dans $\mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$\begin{cases} t_1 + \cdots + t_n = 1, \\ t_1\lambda_1 + \cdots + t_n\lambda_n = 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.10, il existe $r_1,\ldots,$ $r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $m_1\lambda_1 = -(m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n)$. Donc $m_1\lambda_1 \in X \cap -X$ (voir la propriété (P2)). Donc, d'après le lemme 1.3 (a) et (c), on a $\lambda_1 \in X \cap -X$, ce qui est impossible car $\lambda_1 \in X^+ = X \setminus (-X)$. Cela montre donc que

$$0 \notin \mathscr{C}^+.$$

L'ensemble $\mathscr{C}^+$ étant convexe, il découle du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire non nulle φ sur V telle que

$$\mathscr{C}^+ \subseteq \{\lambda \in V \mid \varphi(\lambda) \geqslant 0\}.$$

En particulier,

$$(*) \qquad X^+ \subseteq \mathscr{C}^+ \cap \Lambda \subseteq \operatorname{Pos}(\varphi).$$

D'après le lemme 1.9, et puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on a bien $X \subseteq \operatorname{Pos}(\varphi)$. Cela montre (a).

Soit φ' une autre forme linéaire telle que $X \subseteq \operatorname{Pos}(\varphi')$. Posons $U = \{\lambda \in V \mid \varphi(\lambda) > 0 \text{ et } \varphi'(\lambda) < 0\}$. Alors U est un ouvert de V. Fixons une $\mathbb{Z}$-base $(e_1,\ldots,e_d)$ de Λ. Si $U \neq \varnothing$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ tels que λ, $\lambda + \varepsilon e_1,\ldots,$ $\lambda + \varepsilon e_d$ appartiennent à U. Quitte à multiplier par le produit des dénominateurs de ε et des coordonnées de λ dans la base $(e_1,\ldots,e_d)$, on peut supposer que $\lambda \in \Lambda$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mais il est clair que $U \cap X^+ = \varnothing$ et $U \cap (-X^+) = \varnothing$. Donc $U \cap \Lambda$ est contenu dans $X \cap (-X)$. Ce dernier étant un sous-groupe, on en déduit que $\varepsilon e_i \in X \cap (-X)$ pour tout i. D'où, d'après le lemme 1.3 (c), $e_i \in X \cap (-X)$

pour tout i. Donc $X = \Lambda$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit que U est vide, c'est-à-dire qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\varphi' = \kappa\varphi$. D'où (b). $\square$

Si φ est une forme linéaire sur V, nous noterons $\bar{\varphi}$ sa classe dans $V^*/\mathbb{R}_{>0}$. Nous noterons $p : V^* \longrightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$ la projection canonique. L'application $\mathrm{Pos} : V^* \to \mathscr{P}\!os(\Lambda)$ se factorise à travers p en une application $\overline{\mathrm{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \to \mathscr{P}\!os(\Lambda)$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\mathrm{Pos}"] & \\
V^*/\mathbb{R}_{>0} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Pos}}"] & \mathscr{P}\!os(\Lambda)
\end{tikzcd}$$

commutatif. D'autre part, si $X \in \mathscr{P}\!os(\Lambda)$, nous noterons $\pi(X)$ l'unique élément $\bar{\varphi} \in V^*/\mathbb{R}_{>0}$ tel que $X \subseteq \overline{\mathrm{Pos}}(\bar{\varphi})$ (voir le théorème 1.11). On a donc défini deux applications

$$V^*/\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\overline{\mathrm{Pos}}} \mathscr{P}\!os(\Lambda) \xrightarrow{\pi} V^*/\mathbb{R}_{>0}$$

et le théorème 1.11 (b) montre que

(1.12) $$\pi \circ \overline{\mathrm{Pos}} = \mathrm{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}.$$

Donc π est surjective et $\overline{\mathrm{Pos}}$ est injective. En revanche, ni π, ni $\overline{\mathrm{Pos}}$ ne sont des bijections (sauf si Λ est de rang 1). Nous allons décrire les fibres de π :

Proposition 1.13. *Soit φ une forme linéaire non nulle sur V. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} i_{\bar{\varphi}} : & \mathscr{P}\!os(\mathrm{Ker}\,\varphi|_\Lambda) & \longrightarrow & \pi^{-1}(\bar{\varphi}) \\ & X & \longmapsto & X \cup \mathrm{Pos}^+(\varphi) \end{array}$$

est bien définie et bijective. Sa réciproque est l'application

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\bar{\varphi}) & \longrightarrow & \mathscr{P}\!os(\mathrm{Ker}\,\varphi|_\Lambda) \\ Y & \longmapsto & Y \cap \mathrm{Ker}\,\varphi|\lambda. \end{array}$$

REMARQUE - Il est facile de voir que $\pi^{-1}(\bar{0}) = \{\Lambda\}$. Nous pouvons aussi définir une application $i_{\bar{0}} : \mathscr{P}\!os(\Lambda) \to \mathscr{P}\!os(\Lambda)$ par la même formule que dans la proposition 1.13 : alors $i_{\bar{0}}$ est tout simplement l'application identité mais on a dans ce cas-là $\pi^{-1}(\bar{0}) \neq i_{\bar{0}}(\mathscr{P}\!os(\Lambda))$. $\square$

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'application $i_{\bar{\varphi}}$ est bien définie. Soit $X \in \mathscr{P}\!os(\mathrm{Ker}\,\varphi|\Lambda)$. Posons $Y = X \cup \mathrm{Pos}^+(\varphi)$. Montrons que Y est une partie positive de Λ. Avant cela, notons que

$(*)$ $$Y \subseteq \mathrm{Pos}(\varphi).$$

(1) Si $\lambda \in \Lambda$, deux cas se présentent. Si $\varphi(\lambda) \neq 0$, alors $\lambda \in \operatorname{Pos}^+(\varphi) \cup -\operatorname{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y \cup (-Y)$. Si $\varphi(\lambda) = 0$, alors $\lambda \in \operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$, donc $\lambda \in X \cup (-X) \subseteq Y \cup (-Y)$ car X est une partie positive de $\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$. Donc $\Lambda = Y \cup (-Y)$.

(2) Soient λ, $\mu \in Y$. Montrons que $\lambda + \mu \in Y$. Si $\varphi(\lambda+\mu) > 0$, alors $\lambda + \mu \in \operatorname{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y$. Si $\varphi(\lambda + \mu) = 0$, alors il résulte de $(*)$ que $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$, donc λ, $\mu \in \operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$. En particulier, λ, $\mu \in X$ et donc $\lambda + \mu \in X + X \subseteq X \subseteq Y$. Donc $Y + Y \subseteq Y$.

(3) On a $Y \cap (-Y) = X \cap (-X)$, donc $Y \cap (-Y)$ est un sous-groupe de Λ.

Les points (1), (2) et (3) ci-dessus montrent que Y est une partie positive de Λ. L'inclusion $(*)$ montre que $\pi(Y) = \bar{\varphi}$, c'est-à-dire que $Y \in \pi^{-1}(\bar{\varphi})$. Donc l'application $i_{\bar{\varphi}}$ est bien définie.

Elle est injective car, si $X \in \mathscr{P}os(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda)$, alors $X \cap \operatorname{Pos}^+(\varphi) = \varnothing$. Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit $Y \in \pi^{-1}(\bar{\varphi})$. Posons $X = Y \cap \operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$. Alors X est une partie positive de $\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$ d'après le corollaire 1.18. Posons $Y' = X \cup \operatorname{Pos}^+(\varphi)$. Il nous reste à montrer que $Y = Y'$.

Tout d'abord, $\operatorname{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y$ car $\pi(Y) = \bar{\varphi}$ par hypothèse et $X \subseteq Y$. Donc $Y' \subseteq Y$. Réciproquement, si $\lambda \in Y$, deux cas se présentent. Si $\varphi(\lambda) > 0$, alors $\lambda \in \operatorname{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y'$. Si $\varphi(\lambda) = 0$, alors $\lambda \in Y \cap \operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda = X \subseteq Y'$. Dans tous les cas, $\lambda \in Y'$. $\square$

Exemple 1.14 - Si φ est une forme linéaire non nulle sur V, alors $\operatorname{Pos}(\varphi) = i_{\bar{\varphi}}(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda)$. $\square$

Nous pouvons maintenant classifier les parties positives de Λ en termes de formes linéaires. Notons $\mathscr{F}(\Lambda)$ l'ensemble des suites finies $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ telles que (en posant $\varphi_0 = 0$), pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, φ_i soit une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\Lambda \cap \operatorname{Ker} \varphi_{i-1})$. Par convention, nous supposerons que la suite vide, notée $\varnothing$, appartient à $\mathscr{F}(\Lambda)$.

Posons $d = \dim V$. Notons que, si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in \mathscr{F}(\Lambda)$, alors $r \leqslant d$. Nous définissons donc l'action suivante de $(\mathbb{R}_{>0})^d$ sur $\mathscr{F}(\Lambda)$: si $(\kappa_1, \ldots, \kappa_d) \in (\mathbb{R}_{>0})^d$ et si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in \mathscr{F}(\Lambda)$, on pose

$$(\kappa_1, \ldots, \kappa_d) \cdot (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = (\kappa_1\varphi_1, \ldots, \kappa_r\varphi_r).$$

Munissons $\mathbb{R}^r$ de l'ordre lexicographique : c'est un groupe abélien totalement ordonné et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) : \Lambda \to \mathbb{R}^r$ est un morphisme de groupes. Donc $\operatorname{Pos}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est bien défini et appartient à $\mathscr{P}os(\Lambda)$. En fait, toute partie positive de Λ peut être retrouvée ainsi :

Proposition 1.15. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\Lambda) & \longrightarrow & \mathscr{P}os(\Lambda) \\ \boldsymbol{\varphi} & \longmapsto & \mathrm{Pos}(\boldsymbol{\varphi}) \end{array}$$

est bien définie et induit une bijection $\mathscr{F}(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}os(\Lambda)$.

REMARQUE - Dans cette proposition, on a posé par convention $\mathrm{Pos}(\varnothing) = \Lambda$. □

Démonstration. Cela résulte immédiatement d'un raisonnement par récurrence sur le rang de Λ en utilisant le théorème 1.11 et la proposition 1.13. □

Si $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{F}(\Lambda)$, nous noterons $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ sa classe dans $\mathscr{F}(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d$ et nous poserons $\overline{\mathrm{Pos}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathrm{Pos}(\boldsymbol{\varphi})$. Comme corollaire de la proposition 1.15, nous obtenons une classification des ordres totaux sur Λ (compatibles avec la structure de groupe), ce qui est un résultat classique [3]. En fait, se donner un ordre total sur Λ est équivalent à se donner une partie positive X de Λ telle que $X \cap (-X) = 0$. Notons $\mathscr{F}_0(\Lambda)$ l'ensemble des éléments $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in \mathscr{F}(\Lambda)$ tels que $\Lambda \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_r = 0$.

Corollaire 1.16. *L'application décrite dans la proposition 1.15 induit une bijection entre l'ensemble* $\mathscr{F}_0(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d$ *et l'ensemble des ordres totaux sur* Λ *compatibles avec la structure de groupe.*

1.C. **Fonctorialité.** Soit $\sigma : \Lambda' \to \Lambda$ un morphisme de groupes abéliens. Le résultat suivant est facile :

Lemme 1.17. *Si* X *est une partie positive de* Λ*, alors* $\sigma^{-1}(X)$ *est une partie positive de* Λ'.

Démonstration. Soit $X \in \mathscr{P}os(\Lambda)$. Posons $X' = \sigma^{-1}(X)$. Montrons que $X' \in \mathscr{P}os(\Lambda')$.

(1) On a $X' \cup (-X') = \sigma^{-1}(X \cup (-X)) = \sigma^{-1}(\Lambda) = \Lambda'$.

(2) Si λ' et μ' sont deux éléments de X', alors $\sigma(\lambda')$ et $\sigma(\mu')$ appartiennent à X. Donc $\sigma(\lambda') + \sigma(\mu') \in X$. En d'autres termes, $\lambda' + \mu' \in X'$. Donc $X' + X' \subseteq X'$.

(3) On a $X' \cap (-X') = \sigma^{-1}(X \cap (-X))$, donc l'ensemble $X' \cap (-X')$ est un sous-groupe de Λ'. □

Corollaire 1.18. *Si* Λ' *est un sous-groupe de* Λ *et si* X *est une partie positive de* Λ*, alors* $X \cap \Lambda'$ *est une partie positive de* Λ'.

Si $\sigma : \Lambda' \to \Lambda$ est un morphisme de groupes abéliens, nous noterons $\sigma^* : \mathscr{P}os(\Lambda) \to \mathscr{P}os(\Lambda')$, $X \mapsto \sigma^{-1}(X)$ induite par le lemme 1.17. Si $\tau : \Lambda'' \to \Lambda'$ est un morphisme de groupe abéliens, il est alors facile de vérifier que

(1.19) $$(\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^*.$$

D'autre part, si on note $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda'$, alors σ induit une application $\mathbb{R}$-linéaire $\sigma_{\mathbb{R}} : V' \longrightarrow V$ dont nous noterons ${}^t\sigma_{\mathbb{R}} : V^* \longrightarrow V'^*$ l'application duale et ${}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow V'^*/\mathbb{R}_{>0}$ l'application (continue) induite. Il est alors facile de vérifier que le diagramme

(1.20) $$\begin{tikzcd} V^*/\mathbb{R}_{>0} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Pos}}"] \arrow[d, "{}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}}"] & \mathscr{P}os(\Lambda) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sigma^*"] & V^*/\mathbb{R}_{>0} \arrow[d, "{}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}}"] \\ V'^*/\mathbb{R}_{>0} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Pos}}'"] & \mathscr{P}os(\Lambda') \arrow[r, "\pi'"] & V'^*/\mathbb{R}_{>0} \end{tikzcd}$$

est commutatif (où $\overline{\mathrm{Pos}}'$ et π' sont les analogues de $\overline{\mathrm{Pos}}$ et π pour le réseau Λ').

2. Topologie sur $\mathscr{P}os(\Lambda)$

Dans cette section, nous allons définir sur $\mathscr{P}os(\Lambda)$ une topologie et en étudier les propriétés. Nous allons notamment montrer que la plupart des applications introduites dans la section précédente ($\overline{\mathrm{Pos}}$, π, $i_{\bar{\varphi}}$,...) sont continues.

2.A. **Définition.** Si E est une partie de Λ, nous poserons

$$\mathscr{U}(E) = \{X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \mid X \cap E = \varnothing\}.$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de Λ, nous noterons pour simplifier $\mathscr{U}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ l'ensemble $\mathscr{U}(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\})$. Si cela est nécessaire, nous noterons ces ensembles $\mathscr{U}_\Lambda(E)$ ou $\mathscr{U}_\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a alors

(2.1) $$\mathscr{U}(E) = \bigcap_{\lambda \in E} \mathscr{U}(\lambda).$$

Notons que

(2.2) $$\mathscr{U}(\varnothing) = \mathscr{P}os(\Lambda) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{U}(\Lambda) = \{\varnothing\}.$$

D'autre part, si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de Λ, alors

(2.3) $$\bigcap_{i \in I} \mathscr{U}(E_i) = \mathscr{U}\big(\bigcup_{i \in I} E_i\big).$$

Une partie $\mathscr{U}$ de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ sera dite *ouverte* si, pour tout $X \in \mathscr{U}$, il existe une partie **finie** E de Λ telle que $X \in \mathscr{U}(E)$ et $\mathscr{U}(E) \subset \mathscr{U}$. L'égalité 2.3 montre que cela définit bien une topologie sur $\mathscr{P}os(\Lambda)$.

Proposition 2.4. *Si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ contenant Λ, alors $\mathscr{U} = \mathscr{P}os(\Lambda)$. En particulier, $\mathscr{P}os(\Lambda)$ est connexe. Si $\Lambda \neq 0$, alors il n'est pas séparé.*

Démonstration. Par définition, il existe une partie finie E de $\Lambda \setminus \Lambda$ telle que $\mathscr{U}(E) \subseteq \mathscr{U}$. Mais on a forcément $E = \varnothing$, donc $\mathscr{U} = \mathscr{P}os(\Lambda)$ d'après 2.2. D'où le résultat.

Le fait que $\mathscr{P}os(\Lambda)$ n'est pas séparé (lorsque $\Lambda \neq 0$) en découle : le point Λ de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ ne peut être séparé d'aucun autre. $\square$

EXEMPLE 2.5 - L'espace topologique $\mathscr{P}os(\mathbb{Z})$ n'a que trois points : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ et $\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$. Sur ces trois points, seul $\mathbb{Z}$ est un point fermé et $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ et $\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ sont des points ouverts (en effet, $\{\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} = \mathscr{U}(-1)$ et $\{\mathbb{Z}_{\leqslant 0}\} = \mathscr{U}(1)$). $\square$

Il est clair que la topologie sur $\mathscr{P}os(\Lambda)$ définie ci-dessus est la topologie induite par une topologie sur l'ensemble des parties de Λ (définie de façon analogue) : cette dernière est très grossière mais sa restriction à $\mathscr{P}os(\Lambda)$ est plus intéressante.

Nous aurons besoin de la propriété suivante des ensembles $\mathscr{U}(E)$:

Lemme 2.6. *Soit E une partie* ***finie*** *de Λ. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathscr{U}(E) = \varnothing$.

(2) *Il existe $n \geqslant 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i\lambda_i = 0$.

(3) *Il n'existe pas de forme linéaire φ sur V^* telle que $\varphi(E) \subset \mathbb{R}_{>0}$.*

Démonstration. S'il existe une forme linéaire φ sur V^* telle que $\varphi(E) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, alors $\mathrm{Pos}(-\varphi) \in \mathscr{U}(E)$, et donc $\mathscr{U}(E) \neq \varnothing$. Donc (1) $\Rightarrow$ (3).

Supposons trouvés $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $r_1\lambda_1 + \cdots + r_n\lambda_n = 0$. Alors, si $X \in \mathscr{U}(E)$, on a $-\lambda_2, \dots, -\lambda_n \in X$. Mais $r_1\lambda_1 = -r_2\lambda_2 - \cdots - r_n\lambda_n \in X$, donc $\lambda_1 \in X$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc (2) $\Rightarrow$ (1).

Il nous reste à montrer que (3) $\Rightarrow$ (2). Supposons que (2) n'est pas vraie. Nous allons montrer qu'alors (3) n'est pas vraie en raisonnant par récurrence sur la dimension de V (c'est-à-dire le rang de Λ). Posons

$$\mathscr{C} = \{t_1\lambda_1 + \cdots t_n\lambda_n \mid n \geqslant 1,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda,\ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Alors $\mathscr{C}$ est une partie convexe de V contenant E et, d'après le lemme 1.10 et le fait que (2) ne soit pas vraie, on a $0 \notin \mathscr{C}$. Par conséquent, il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $\varphi(\mathscr{C}) \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Posons $\Lambda' = (\operatorname{Ker}\varphi) \cap \Lambda$ et $E' = E \cap \Lambda$. Alors l'assertion (2) pour E' n'est pas vraie elle aussi donc, par hypothèse de récurrence, il existe un forme linéaire ψ sur $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda' \subseteq V$ telle que $\psi(E') \subset \mathbb{R}_{>0}$. Soit $\tilde{\psi}$ une extension de ψ à V. Puisque $\varphi(E \setminus E') \subset \mathbb{R}_{>0}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(\lambda) + \varepsilon\tilde{\psi}(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in E \setminus E'$. Mais on a aussi, si $\lambda \in E'$, $\varphi(\lambda) + \varepsilon\tilde{\psi}(\lambda) = \varepsilon\tilde{\psi}(\lambda) > 0$. Donc $(\varphi + \varepsilon\tilde{\psi})(E) \subset \mathbb{R}_{>0}$. □

Si $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathscr{P}os(\Lambda)$, nous noterons $\overline{\mathscr{E}}$ son adhérence dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$.

Corollaire 2.7. *Soit E une partie **finie** de Λ telle que $\mathscr{U}(E) \neq \varnothing$. Alors*

$$\overline{\mathscr{U}(E)} = \mathscr{P}os(\Lambda) \setminus \Big(\bigcup_{\lambda \in E} \mathscr{U}(-\lambda)\Big).$$

Démonstration. Posons

$$\mathscr{O} = \bigcup_{\lambda \in E} \mathscr{U}(-\lambda)$$

et

$$\mathscr{F} = \mathscr{P}os(\Lambda) \setminus \mathscr{O}.$$

Alors $\mathscr{F}$ est fermé dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$ et contient $\mathscr{U}(E)$. Donc $\overline{\mathscr{U}(E)} \subseteq \mathscr{F}$.

Réciproquement, soit $X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \setminus \overline{\mathscr{U}(E)}$. Nous devons montrer que

$$X \in \mathscr{O}. \tag{?}$$

Puisque $\mathscr{P}os(\Lambda) \setminus \overline{\mathscr{U}(E)}$ est un ouvert, il existe une partie finie F de Λ telle que $X \in \mathscr{U}(F)$ et $\mathscr{U}(F) \subseteq \mathscr{O}$. En particulier, $\mathscr{U}(F) \cap \mathscr{U}(E) = \varnothing$. En d'autres termes, d'après 2.3, on a $\mathscr{U}(E \cup F) = \varnothing$. Donc, d'après le lemme 2.6, il existe $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in E$, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in F$, $r_1, \ldots, r_m$, $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que

$$r_1\lambda_1 + \cdots + r_m\lambda_m + s_1\mu_1 + \cdots + s_n\mu_n = 0$$

et $m + n \geqslant 1$. En fait, comme $\mathscr{U}(E)$ et $\mathscr{U}(F)$ sont toutes deux non vides, il découle du lemme 2.6 que $m, n \geqslant 1$.

Si $X \notin \mathscr{O}$, alors $-\lambda_i \in X$ pour tout i, ce qui implique que $s_1\mu_1 + \cdots + s_n\mu_n \in X$. Cela ne peut se produire que si au moins l'un des μ_j appartient à X, mais c'est impossible car $F \cap X = \varnothing$. D'où (?). □

Exemple 2.8 - Le corollaire 2.7 n'est pas forcément vrai si $\mathscr{U}(E) = \varnothing$. En effet, si $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, alors $\mathscr{U}(\lambda, -\lambda) = \varnothing$ mais, du moins lorsque $\dim V \geqslant 2$, on a $\mathscr{U}(\lambda) \cup \mathscr{U}(-\lambda) \neq \mathscr{P}os(\Lambda)$. □

2.B. **Fonctorialité.** Si Λ' est un autre réseau et si $\sigma : \Lambda' \to \Lambda$ est un morphisme de groupes et si E' est une partie de Λ', alors

$$(\sigma^*)^{-1}\big(\mathscr{U}_{\Lambda'}(E')\big) = \mathscr{U}_\Lambda\big(\sigma(E')\big). \tag{2.9}$$

Preuve de 2.9. Soit X une partie positive de Λ. Alors $X \in (\sigma^*)^{-1}\big(\mathscr{U}_{\Lambda'}(E')\big)$ (resp. $X \in \mathscr{U}_\Lambda\big(\sigma(E')\big)$) si et seulement si $\sigma^{-1}(X) \cap E' = \varnothing$ (resp. $X \cap \sigma(E') = \varnothing$). Il est alors facile de vérifier que ces deux dernières conditions sont équivalentes. □

Cela implique le résultat suivant :

Proposition 2.10. *L'application $\sigma^* : \mathscr{P}os(\Lambda) \to \mathscr{P}os(\Lambda')$ est continue.*

2.C. **Continuité.** D'après la section 1, nous avons équipé l'espace topologique $\mathscr{P}os(\Lambda)$ de deux applications $\overline{\mathrm{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \to \mathscr{P}os(\Lambda)$ et $\pi : \mathscr{P}os(\Lambda) \to V^*/\mathbb{R}_{>0}$ telles que $\pi \circ \overline{\mathrm{Pos}} = \mathrm{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$. Nous montrerons dans le théorème 2.11 que ces applications sont continues (lorsque $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ est bien sûr muni de la topologie quotient) et nous en déduirons quelques autres propriétés topologiques de ces applications. Avant cela, introduisons la notation suivante : si E est une partie finie de Λ, on pose

$$\mathscr{V}(E) = \{\bar{\varphi} \in V^*/\mathbb{R}_{>0} \mid \forall\, \lambda \in E,\ \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Si cela est nécessaire, nous noterons $\mathscr{V}_\Lambda(E)$ l'ensemble $\mathscr{V}(E)$. Alors

$$p^{-1}(\mathscr{V}(E)) = \{\varphi \in V^* \mid \forall\, \lambda \in E,\ \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Donc $p^{-1}(\mathscr{V}(E))$ est ouvert, donc $\mathscr{V}(E)$ est ouvert dans $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ par définition de la topologie quotient.

Proposition 2.11. *Les applications $\overline{\mathrm{Pos}}$ et π sont continues. De plus :*

(a) *$\overline{\mathrm{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image.*
(b) *L'image de $\overline{\mathrm{Pos}}$ est dense dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$.*

Démonstration. Soit E une partie finie de Λ. Alors

$$\overline{\mathrm{Pos}}^{-1}(\mathscr{U}(E)) = \mathscr{V}(E). \tag{2.12}$$

Donc $\overline{\mathrm{Pos}}^{-1}(\mathscr{U}(E))$ est un ouvert de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$. Donc $\overline{\mathrm{Pos}}$ est continue.

Montrons maintenant que π est continue. Nous procèderons par étapes :

Lemme 2.13. *Les $\mathscr{V}(E)$, où E parcourt l'ensemble des parties finies de Λ, forment une base d'ouverts de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$.*

Preuve du lemme 2.13. Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et soit φ une forme linéaire sur V telle que $\bar{\varphi} \in \mathscr{U}$. Nous devons montrer qu'il existe une partie finie E de V telle que $\bar{\varphi} \in \mathscr{V}(E)$ et $\mathscr{V}(E) \subset \mathscr{U}$.

Si $\varphi = 0$, alors $\mathscr{U} = V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et le résultat est clair. Nous supposerons donc que $\varphi \neq 0$. Il existe alors $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\varphi(\lambda_0) > 0$. Quitte à remplacer φ par un multiple positif, on peut supposer que $\varphi(\lambda_0) = 1$. Notons $\mathscr{H}_0$ l'hyperplan affine $\{\psi \in V^* \mid \psi(\lambda_0) = 1\}$. Alors l'application naturelle $\mathscr{H}_0 \to V^*/\mathbb{R}_{>0}$ induit un homéomorphisme $\nu : \mathscr{H}_0 \xrightarrow{\sim} \mathscr{V}(-\lambda_0)$. De plus, $\varphi = \nu^{-1}(\varphi) \in \mathscr{H}_0$. Donc $\varphi \in \nu^{-1}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}(-\lambda_0))$. Il suffit dons de vérifier que les intersections finies de demi-espaces ouverts *rationnels* (i.e. de la forme $\{\psi \in \mathscr{H}_0 \mid \psi(\lambda) > n\}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \Lambda \backslash \mathbb{Z}\lambda_0$) forment une base de voisinages de l'espace affine $\mathscr{H}_0$, ce qui est immédiat. $\square$

Compte tenu du lemme 2.13, il suffit de montrer que, si E est une partie finie de Λ, alors $\pi^{-1}(\mathscr{V}(E))$ est un ouvert de $\mathscr{P}os(\Lambda)$. De plus,

$$\mathscr{V}(E) = \bigcap_{\lambda \in E} \mathscr{V}(\lambda).$$

Par conséquent, la continuité de π découlera du lemme suivant:

Lemme 2.14. *Si $\lambda \in \Lambda$, alors $\pi^{-1}(\mathscr{V}(\lambda))$ est un ouvert de $\mathscr{P}os(\Lambda)$.*

Preuve du lemme 2.14. Soit $X \in \pi^{-1}(\mathscr{V}(\lambda))$ et soit $\varphi = \pi(X)$. Par définition, $\varphi(\lambda) < 0$ et donc $\lambda \notin X$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une $\mathbb{Z}$-base de Λ. Il existe un entier naturel non nul N tel que $\varphi(\lambda \pm \frac{1}{N} e_i) < 0$ pour tout i. Quitte à remplacer λ par $N\lambda$, on peut supposer que $\varphi(\lambda \pm e_i) < 0$ pour tout i. On pose alors

$$E = \{\lambda + e_1, \lambda - e_1, \dots, \lambda + e_n, \lambda - e_n\}.$$

Alors $X \in \mathscr{U}(E)$ par construction. Il reste à montrer que $\mathscr{U}(E) \subseteq \pi^{-1}(\mathscr{V}(\lambda))$. Soit $Y \in \mathscr{U}(E)$ et posons $\psi = \pi(Y)$. Supposons de plus que $\psi \notin \mathscr{V}(\lambda)$. On a alors $\psi(\lambda) \geqslant 0$. D'autre part, $\psi(\lambda \pm e_i) \leqslant 0$ pour tout i. Cela montre que $2\psi(\lambda) = \psi(\lambda + e_1) + \psi(\lambda - e_1) \leqslant 0$, et donc $\psi(\lambda) = \psi(\lambda + e_i) = 0$, et donc $\psi(e_i) = 0$ pour tout i. Donc ψ est nulle et donc $Y = \Lambda$, ce qui contredit le fait que $Y \in \mathscr{U}(E)$. Cela montre donc que $\psi \in \mathscr{V}(\lambda)$, comme attendu. $\square$

Puisque π et $\overline{\mathrm{Pos}}$ sont continues et vérifient $\pi \circ \overline{\mathrm{Pos}} = \mathrm{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$, $\overline{\mathrm{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image. D'où (a).

L'assertion (b) découle du lemme suivant (qui est une conséquence immédiate de l'équivalence entre (1) et (3) dans le lemme 2.6) et de 2.12 :

Lemme 2.15. *Soit E une partie finie de Λ telle que $\mathscr{U}(E) \neq \varnothing$. Alors $\mathscr{V}(E) \neq \varnothing$.*

La preuve de la proposition 2.11 est terminée. $\square$

Nous allons maintenant étudier les propriétés topologiques des applications $i_{\bar{\varphi}}$.

Proposition 2.16. *Soit $\varphi \in V^*$ et supposons $\varphi \neq 0$. Alors :*

(a) $$\bigcap_{\substack{\mathscr{U} \text{ ouvert de } \mathscr{P}os(\Lambda) \\ \mathrm{Pos}(\varphi) \in \mathscr{U}}} \mathscr{U} = i_{\bar{\varphi}}\big(\mathscr{P}os(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda)\big) = \pi^{-1}(\bar{\varphi}).$$

(d) *$i_{\bar{\varphi}}$ est continue et induit un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. (a) Notons I_φ l'image de $i_{\bar{\varphi}}$. On a alors, d'après le lemme 1.9,

$$(*) \qquad I_\varphi = \{X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \mid \mathrm{Pos}^+(\varphi) \subseteq X\}.$$

Si $\mathscr{U}$ est un ouvert contenant $\mathrm{Pos}(\varphi)$, alors il existe une partie finie E de $\Lambda \setminus \mathrm{Pos}(\varphi)$ telle que $\mathscr{U}(E) \subseteq \mathscr{U}$. Mais, si X est dans l'image de $i_{\bar{\varphi}}$, alors $X \subseteq \mathrm{Pos}(\varphi)$, donc $X \cap E = \varnothing$. Et donc $X \in \mathscr{U}$, ce qui montre que

$$I_\varphi \subseteq \bigcap_{\substack{\mathscr{U} \text{ ouvert de } \mathscr{P}os(\Lambda) \\ \mathrm{Pos}(\varphi) \in \mathscr{U}}} \mathscr{U}.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \mathscr{P}os(\Lambda)$ tel que $X \notin I_\varphi$. Posons $\psi = \pi(X)$. Alors $\bar{\psi} \neq \bar{\varphi}$ donc, d'après la preuve du théorème 1.11, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\varphi(\lambda) < 0$ et $\psi(\lambda) > 0$. On a donc, d'après le lemme 1.9, $X \notin \mathscr{U}(\lambda)$. D'autre part, $\mathrm{Pos}(\varphi) \in \mathscr{U}(\lambda)$. D'où (a).

Montrons (b). On note $\pi_{\bar{\varphi}} : I_\varphi \to \mathscr{P}os(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda)$, $X \mapsto X \cap \operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$. D'après la proposition 1.13, $\pi_{\bar{\varphi}}$ est la bijection réciproque de $i_{\bar{\varphi}} : \mathscr{P}os(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda) \to I_\varphi$. Il nous faut donc montrer que $i_{\bar{\varphi}}$ et $\pi_{\bar{\varphi}}$ sont continues. Si F est une partie finie de $\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda$, nous noterons $\mathscr{U}_{\bar{\varphi}}(F)$ l'analogue de l'ensemble $\mathscr{U}(F)$ défini à l'intérieur de $\mathscr{P}os(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda)$.

Soit E une partie finie de Λ. Nous voulons montrer que $i_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathscr{U}(E))$ est un ouvert de $\mathscr{P}os(\operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda)$. S'il existe $\lambda \in E$ tel que $\varphi(\lambda) > 0$, alors $\mathscr{U}(E) \cap I_\varphi = \varnothing$ (voir $(*)$). On peut donc supposer que $\varphi(\lambda) \leqslant 0$ pour tout $\lambda \in E$. Il est alors facile de vérifier que

$$i_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathscr{U}(E)) = \mathscr{U}_{\bar{\varphi}}(E \cap \operatorname{Ker} \varphi|_\Lambda).$$

Donc $i_{\bar{\varphi}}$ est continue.

Soit F une partie finie de $\operatorname{Ker}\varphi|_\Lambda$. Alors

$$\pi_{\bar\varphi}^{-1}(\mathscr{U}_{\bar\varphi}(F)) = \mathscr{U}(F) \cap I_\varphi.$$

Donc $\pi_{\bar\varphi}$ est continue. $\square$

Nous allons résumer dans le théorème suivant la plupart des résutats obtenus dans cette sous-section.

Théorème 2.17. *Supposons $\Lambda \neq 0$ et soit $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$.*

(a) *$\mathscr{P}os(\Lambda)$ est connexe. Il n'est pas séparé si $\Lambda \neq 0$.*

(b) *Les applications $\pi : \mathscr{P}os(\Lambda) \to V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et $\overline{\operatorname{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \to \mathscr{P}os(\Lambda)$ sont continues et vérifient $\pi \circ \overline{\operatorname{Pos}} = \operatorname{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$.*

(c) *$\overline{\operatorname{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image ; cette image est dense dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$.*

(d) *$\pi^{-1}(\bar\varphi)$ est l'intersection des voisinages de $\operatorname{Pos}(\varphi)$ dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$.*

(e) *$i_{\bar\varphi}$ est un homéomorphisme.*

3. ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS

L'application continue $\operatorname{Pos} : V^* \to \mathscr{P}os(\Lambda)$ a une image dense. Nous allons étudier ici comment se transpose la notion d'arrangement d'hyperplans (et les objets attachés : facettes, chambres, support...) à l'espace topologique $\mathscr{P}os(\Lambda)$ à travers Pos. Cela nous permettra d'énoncer les conjectures sur les cellules de Kazhdan-Lusztig sous la forme la plus générale possible [1, Conjectures A et B].

3.A. **Sous-espaces rationnels.** Si E est une partie de Λ, on pose

$$\mathscr{L}(E) = \{X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \mid E \subset X \cap (-X)\}.$$

Si cela est nécessaire, nous le noterons $\mathscr{L}_\Lambda(E)$. On appelle *sous-espace rationnel* de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ toute partie de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ de la forme $\mathscr{L}(E)$, où E est une partie de Λ. Si $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, on notera $\mathscr{H}_\lambda$ le sous-espace rationnel $\mathscr{L}(\{\lambda\})$: un tel sous-espace rationnel sera appelé un *hyperplan rationnel.* Notons que

(3.1) $$\mathscr{P}os(\Lambda) = \mathscr{U}(\lambda) \,\dot\cup\, \mathscr{H}_\lambda \,\dot\cup\, \mathscr{U}(-\lambda).$$

La proposition suivante justifie quelque peu la terminologie :

Proposition 3.2. *Soit E est une partie de Λ. Notons $\Lambda(E)$ le sous-réseau $\Lambda \cap \sum_{\lambda\in E} \mathbb{Q}E$ de Λ et soit $\sigma_E : \Lambda \to \Lambda/\Lambda(E)$ l'application canonique. Alors :*

(a) $\mathscr{L}(E) = \displaystyle\bigcap_{\lambda \in E\setminus\{0\}} \mathscr{H}_\lambda = \{X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X\}.$

(b) *$\mathscr{L}(E)$ est fermé dans $\mathscr{P}os(\Lambda)$.*

(c) $\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{L}(E)) = \{\varphi \in V^* \mid \forall\ \lambda \in E,\ \varphi(\lambda) = 0\} = E^\perp$.
(d) $\overline{\mathrm{Pos}}(\pi(\mathscr{L}(E)) \subseteq \mathscr{L}(E)$.
(e) $\overline{\mathrm{Pos}}^{-1}(\mathscr{L}(E)) = \pi(\mathscr{L}(E))$.
(f) $\mathscr{L}(E) = \overline{\mathrm{Pos}(\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{L}(E)))}$.
(g) *L'application* $\sigma_E^* : \mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \to \mathscr{P}os(\Lambda)$ *a pour image* $\mathscr{L}(E)$ *et induit un homéomorphisme* $\mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}(E)$.

Démonstration. La première égalité de (a) est immédiate. La deuxième découle de la proposition 1.3 (c). (b) découle de (a) et de 3.1. (c) est tout aussi clair.

(d) Si $X \in \overline{\mathrm{Pos}}(\pi(\mathscr{L}(E))$, alors il existe $Y \in \mathscr{L}(E)$ tel que $X = \overline{\mathrm{Pos}}(\pi(Y))$. Posons $\bar{\varphi} = \pi(Y)$, où $\varphi \in V^*$. Alors $E \subseteq Y \cap (-Y)$ et $Y \subseteq \mathrm{Pos}(\varphi)$. Or, $\varphi(\lambda) = 0$ si $\lambda \in Y \cap (-Y)$, donc $X = \mathrm{Pos}(\varphi) \in \mathscr{L}(E)$.

(e) D'après (d), on a $\pi(\Lambda(E)) \subseteq \overline{\mathrm{Pos}}^{-1}(\mathscr{L}(E))$. Réciproquement, soit φ un élément de $\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{L}(E))$, alors $\bar{\varphi} = \pi(\overline{\mathrm{Pos}}(\bar{\varphi})) \in \pi(\mathscr{L}(E))$. D'où (e).

(f) Notons $\mathscr{F}_E = \mathrm{Pos}(\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{L}(E)))$. On a $\mathscr{F}_E \subseteq \mathscr{L}(E)$ donc il découle du (a) que $\overline{\mathscr{F}}_E \subseteq \mathscr{L}(E)$. Réciproquement, soit F une partie finie de Λ telle que $\mathscr{U}(F) \cap \mathscr{F}_E = \varnothing$. Nous devons montrer que $\mathscr{U}(F) \cap \mathscr{L}(E) = \varnothing$. Or, le fait que $\mathscr{U}(F) \cap \mathscr{F}_E = \varnothing$ est équivalent à l'assertion suivante (voir (c)) :

$$\forall\ \varphi \in E^\perp,\ \forall\ \lambda \in F,\ \varphi(\lambda) \geqslant 0.$$

Or, si $\varphi \in E^\perp$, alors $-\varphi \in E^\perp$, ce qui implique que :

$$\forall\ \varphi \in E^\perp,\ \forall\ \lambda \in F,\ \varphi(\lambda) = 0.$$

En d'autres termes, $F \subseteq (E^\perp)^\perp \cap \Lambda = \Lambda(E)$. Mais, si $X \in \mathscr{L}(E)$, alors $\Lambda(E) \subseteq X$ d'après (a). Donc $X \notin \mathscr{U}(F)$, comme espéré.

(g) Le fait que l'image de σ_E^* soit $\mathscr{L}(E)$ découle de (a). D'autre part, σ_E^* est continue d'après la proposition 2.10. Notons

$$\begin{array}{rccc} \gamma_E : & \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \\ & X & \longmapsto & X/\Lambda(E). \end{array}$$

Alors γ_E est la réciproque de σ_E^*. Il ne nous reste qu'à montrer que γ_E est continue. Soit donc F une partie finie de $\Lambda/\Lambda(E)$ et notons $\tilde{F}$ un ensemble de représentants des éléments de F dans Λ. On a

$$\begin{array}{rcl} \gamma_E^{-1}(\mathscr{U}_{\Lambda/\Lambda(E)}(F)) & = & \{X \in \mathscr{L}(E) \mid \forall\ \lambda \in F,\ \lambda \notin X/\Lambda(E)\} \\ & = & \{X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X \text{ et } \forall\ \lambda \in F,\ \lambda \notin X/\Lambda(E)\} \\ & = & \{X \in \mathscr{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X \text{ et } \forall\ \lambda \in \tilde{F},\ \lambda \notin X\} \\ & = & \{X \in \mathscr{L}(E) \mid \forall\ \lambda \in \tilde{F},\ \lambda \notin X\} \\ & = & \mathscr{L}(E) \cap \mathscr{U}_\Lambda(\tilde{F}). \end{array}$$

Donc $\gamma_E^{-1}(\mathscr{U}_{\Lambda/\Lambda(E)})$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$. Cela montre la continuité de γ_E. $\square$

3.B. **Demi-espaces.** Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan rationnel de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ et soit $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ tel que $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\lambda$. D'après 3.1, l'hyperplan $\mathscr{H}$ nous définit une unique relation d'équivalence $\smile_{\mathscr{H}}$ sur $\mathscr{P}os(\Lambda)$ pour laquelle les classes d'équivalence sont $\mathscr{U}(\lambda)$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{U}(-\lambda)$: notons que cette relation ne dépend pas du choix de λ. De plus :

Proposition 3.3. *$\mathscr{H}$ est un fermé de $\mathscr{P}os(\Lambda)$ et $\mathscr{U}(\lambda)$ et $\mathscr{U}(-\lambda)$ sont les composantes connexes de $\mathscr{P}os(\Lambda) \setminus \mathscr{H}$. De plus*

$$\overline{\mathscr{U}(\lambda)} = \mathscr{U}(\lambda) \cup \mathscr{H}_\lambda.$$

Démonstration. La dernière assertion est un cas particulier du corollaire 2.7.

Montrons pour finir que $\mathscr{U}(\lambda)$ est connexe. Soient $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux ouverts de $\mathscr{U}(\lambda)$ tels que $\mathscr{U}(\lambda) = \mathscr{U} \coprod \mathscr{V}$. Alors

$$\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{U}(\lambda)) = \mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{U}) \coprod \mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{V}).$$

Mais $\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{U}(\lambda)) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\lambda) < 0\}$. Donc $\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{U}(\lambda))$ est connexe. Puisque Pos est continue, cela implique que $\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{U}) = \varnothing$ ou $\mathrm{Pos}^{-1}(\mathscr{V}) = \varnothing$. Le lemme 2.15 implique que $\mathscr{U} = \varnothing$ ou $\mathscr{V} = \varnothing$. $\square$

Si $X \in \mathscr{P}os(\Lambda)$, nous noterons $\mathscr{D}_{\mathscr{H}}(X)$ la classe d'équivalence de X sous la relation $\smile_{\mathscr{H}}$. Il résulte de la proposition 3.3 que $\overline{\mathscr{D}_{\mathscr{H}}(X)}$ est une réunion de classes d'équivalences pour $\smile_{\mathscr{H}}$.

3.C. **Arrangements.** Nous travaillerons désormais sous l'hypothèse suivante :

> *Fixons maintenant, et ce jusqu'à la fin de cette section, un ensemble **fini** $\mathfrak{A}$ d'hyperplans rationnels de $\mathscr{P}os(\Lambda)$.*

Nous allons redéfinir, dans notre espace $\mathscr{P}os(\Lambda)$, les notions de *facettes*, *chambres* et *faces* associées à $\mathfrak{A}$, de façon similaire à ce qui se fait pour les arrangements d'hyperplans dans un espace réel [2, Chapitre V, §1]. Les propriétés des applications π et $\overline{\mathrm{Pos}}$ établies précédemment permettent facilement de démontrer les résultats analogues.

Nous définissons la relation $\smile_{\mathfrak{A}}$ sur $\mathscr{P}os(\Lambda)$ de la façon suivante : si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{P}os(\Lambda)$, nous écrirons $X \smile_{\mathfrak{A}} Y$ si $X \smile_{\mathscr{H}} Y$ pour tout $\mathscr{H} \in \mathfrak{A}$. Nous appellerons *facettes* (ou $\mathfrak{A}$-*facettes*) les classes d'équivalence pour la relation

$\smile_{\mathfrak{A}}$. Nous appellerons *chambres* (ou $\mathfrak{A}$-*chambres*) les facettes qui ne rencontrent aucun hyperplan de $\mathfrak{A}$. Si $\mathscr{F}$ est une facette, nous noterons

$$\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}(\mathscr{F}) = \bigcap_{\substack{\mathscr{H} \in \mathfrak{A} \\ \mathscr{F} \subset \mathscr{H}}} \mathscr{H},$$

avec la convention habituelle que $\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}(\mathscr{F}) = \mathscr{P}os(\Lambda)$ si $\mathscr{F}$ est une chambre. Nous l'appellerons le *support* de $\mathscr{F}$ et nous appellerons *dimension* de $\mathscr{F}$ l'entier

$$\dim \mathscr{F} = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Pos}^{-1}(\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}(\mathscr{F})).$$

De même nous appellerons *codimension* de $\mathscr{F}$ l'entier

$$\operatorname{codim} \mathscr{F} = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim \mathscr{F}.$$

Avec ces définitions, une chambre est une facette de codimension 0.

Proposition 3.4. *Soit $\mathscr{F}$ une facette et soit $X \in \mathscr{F}$. Alors :*

(a) $\mathscr{F} = \bigcap_{\mathscr{H} \in \mathfrak{A}} \mathscr{D}_{\mathscr{H}}(X)$.

(b) $\overline{\mathscr{F}} = \bigcap_{\mathscr{H} \in \mathfrak{A}} \overline{\mathscr{D}_{\mathscr{H}}(X)}$.

(c) *$\overline{\mathscr{F}}$ est la réunion de $\mathscr{F}$ et de facettes de dimension strictement inférieures.*

(d) *Si $\mathscr{F}'$ est une facette telle que $\overline{\mathscr{F}} = \overline{\mathscr{F}}'$, alors $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.*

Démonstration. (a) est une conséquence des définitions. Montrons (b). Posons

$$\mathfrak{A}_1 = \{\mathscr{H} \in \mathfrak{A} \mid \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}\}$$
$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1.$$

Pour tout $\mathscr{H} \in \mathfrak{A}$, on fixe un élément $\lambda(\mathscr{H}) \in \Lambda$ tel que $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\lambda(\mathscr{H})}$: si de plus $\mathscr{H} \in \mathfrak{A}_2$, on choisit $\lambda(\mathscr{H})$ de sorte que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}(\lambda(\mathscr{H}))$. On pose

$$E_i = \{\lambda(\mathscr{H}) \mid \mathscr{H} \in \mathfrak{A}_i\}.$$

Par conséquent,

$$\mathscr{F} = \mathscr{L} \cap \mathscr{U}(E_i).$$

Puisque $\mathscr{L}$ est fermé, $\overline{\mathscr{F}}$ est aussi l'adhérence de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{L}$. En utilisant alors l'homéomorphisme $\sigma^*_{E_1} : \mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$ de la proposition 3.2 (g), on se ramène à calculer l'adhérence de $\sigma^{*-1}_{E_1}(\mathscr{F})$ dans $\mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1))$. Mais

$$\sigma^{*-1}_{E_1}(\mathscr{F}) = \sigma^{*-1}_{E_1}(\mathscr{U}_\Lambda(E_2)) = \mathscr{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(E_2)).$$

Or, d'après le corollaire 2.7, on a

$$\overline{\mathscr{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(E_2))} = \mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1)) \setminus \big(\bigcup_{\lambda \in E_2} \mathscr{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(-\lambda))\big).$$

Par conséquent,

$$\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{L} \cap \sigma_{E_1}^*\Big(\mathscr{P}os(\Lambda/\Lambda(E_1)) \setminus \big(\bigcup_{\lambda \in E_2} \mathscr{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(-\lambda))\big)\Big),$$

et donc

$$\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{L} \cap \Big(\bigcap_{\lambda \in E_2} \big(\mathscr{P}os(\Lambda) \setminus \mathscr{U}_\Lambda(-\lambda)\big) = \bigcap_{\lambda \in E_1 \cup E_2} \overline{\mathscr{D}_{\mathscr{H}_\lambda}(X)},$$

comme attendu.

Montrons maintenant (c). D'après (b), $\overline{\mathscr{F}}$ est bien une réunion de facettes. Si de plus $\mathscr{F}'$ est une facette différente de $\mathscr{F}$ et contenue dans $\overline{\mathscr{F}}$, l'assertion (b) montre qu'il existe $\mathscr{H} \in \mathfrak{A}_2$ tel que $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{H}$. Donc $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{L}_{\mathfrak{A}}(\mathscr{F}) \cap \mathscr{H}$, et $\dim \mathrm{Pos}^{-1}\big(\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}(\mathscr{F}) \cap \mathscr{H}\big) = \dim \mathrm{Pos}^{-1}\big(\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}(\mathscr{F})\big) - 1$. D'où (c).

L'assertion (d) découle immédiatement de (c). $\square$

On définit une relation $\preccurlyeq$ (ou $\preccurlyeq_{\mathfrak{A}}$ s'il est nécessaire de préciser) entre les facettes : on écrit $\mathscr{F} \preccurlyeq \mathscr{F}'$ si $\overline{\mathscr{F}} \subseteq \overline{\mathscr{F}}'$ (c'est-à-dire si $\mathscr{F} \subseteq \overline{\mathscr{F}}'$). La proposition 3.4 (d) montre que :

Corollaire 3.5. *La relation $\preccurlyeq$ entre les facettes est une relation d'ordre.*

Références

[1] C. Bonnafé, Semi-continuity properties of Kazhdan-Lusztig cells, preprint (2008), available at `arXiv:0808.3522`.

[2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V et VI*, Hermann, Paris, 1968.

[3] L. Robbiano, Term orderings on the polynomial ring, EUROCAL '85, Vol. 2 (Linz, 1985), 513–517, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **204**, Springer, Berlin, 1985.

Labo. de Math. de Besançon (CNRS: UMR 6623), Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France

E-mail address: `cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr`

URL: `http://www-math.univ-fcomte.fr/pp_Annu/CBONNAFE/`